eureka media aksara

TEORI BILANGAN

HASAN BASRI

Biografi Penulis

Lahir di kabupaten Pamekasan, pada tanggal 14 Agustus 1985, Hasan Basri merupakan anak ketiga dari pasangan Suparmi (Almarhum) dan Moh. Adnan. Beliau menyelesaikan studi SD-SMA di kota kelahirannya, Pamekasan. Setelah lulus SMA melanjutkan studi S1 di Universitas Negeri Malang (UM) dan menyelesaikannya pada tahun 2009 dengan IPK 3,55 (Cumlaude). Pada tahun 2009-2012 menjadi guru di Papua Barat.

Pada tahun 2012 beliau melanjutkan studi S2 di Universitas Negeri Surabaya (UNESA) dan menyelesaikan studi S2 pada tahun 2014 dengan IPK 3,56. Selanjutnya pada tahun 2016 beliau berkesempatan untuk melanjutkan studi S3 melalui program beasiswa Beasiswa Unggulan Dosen Indonesia-Dalam Negeri (BUDI-DN) dan mampu menyelesaikan studi S3 pada tahun 2020 dengan IPK 3,93 (Cumlaude). Selama studi beliau telah menghasilkan beberapa karya berupa artikel ilmiah baik yang terindeks Sinta maupun terindeks Scopus, selain itu beliau juga menghasilkan beberapa buku yaitu Mengembangkan HOTS Melalui Matematika dan Ragam Soal Matematis untuk Mengembangkan Disposisi Berpikir Kritis.

Setelah S3 beliau aktif mengikuti program kemdikbudristek seperti program bantuan implementasi kurikulum MBKM, program MBK, PJJ dan peningkatan kompetensi dosen melalui kemitraan dengan sekolah. Selain itu penulis juga aktif dalam kegiatan MBKM dengan berpartisipasi menjadi DPL Kampus Mengajar angkatan 2 dan menjadi PIC pada program Magang Studi Independen Bersertifikat (MSIB). Pada tahun 2021 beliau juga berhasil lulus menjadi asesor BAN S/M Provinsi Jawa Timur, selain itu di tahun yang sama beliau juga berhasil lulus dalam seleksi hibah mono tahun pada skema riset keilmuan mandiri.

eureka media aksara

Penerbit:
CV. EUREKA MEDIA AKSARA
Jl. Banjaran RT.20 RW.10
Bojongsari - Purbalingga 53362

ISBN 978-623-5581-84-2

9 786235 581842

TEORI BILANGAN

Dr. Hasan Basri, M.Pd

PENERBIT CV.EUREKA MEDIA AKSARA

TEORI BILANGAN

Penulis : **Dr. Hasan Basri, M.Pd**

Desain Sampul : Eri Setiawan

Tata Letak : Avika Dias Saputra

ISBN : 978-623-5581-84-2

Diterbitkan oleh : **EUREKA MEDIA AKSARA,NOVEMBER 2021**
ANGGOTA IKAPI JAWA TENGAH
NO. 225/JTE/2021

Redaksi:
Jalan Banjaran, Desa Banjaran RT 20 RW 10 Kecamatan
Bojongsari Kabupaten Purbalingga
Telp. 0858-5343-1992

Surel : eurekamediaaksara@gmail.com

Cetakan Pertama : 2021

All right reserved

Hak Cipta dilindungi undang-undang
Dilarang memperbanyak atau memindahkan sebagian atau seluruh isi buku ini dalam bentuk apapun dan dengan cara apapun, termasuk memfotokopi, merekam, atau dengan teknik perekaman lainnya tanpa seizin tertulis dari penerbit.

KATA PENGANTAR

Puji syukur Alhamdulillah penulis haturkan ke hadirat ALLAH Azza Wajalla yang telah memberikan taufik, hidayah, dan inayahNYA sehingga penulis berhasil menuliskan Buku Teori Bilangan ini. Sholawat dan salam semoga senantiasa tercurah untuk junjungan kita nabi besar Muhammad SAW yang telah menyampaikan ajaran tentang pentingnya memiliki ilmu bermanfaat yang menjadi pemicu terbitnya tulisan ini.

Buku ini sengaja ditulis dengan sasaran para mahasiswa dan guru matematika. Penulis melihat betapa para mahasiswa dan guru mengalami banyak kebingungan dengan konsep teori bilangan yang banyak muncul dalam soal-soal olimpiade atau kompetisi matematika yang lain. Terkadang mereka juga mengalami misconsepsi terkait konsep-konsep pada teori bilangan. Sebagai Pendidik Matematika yang sudah memiliki pengalaman menjadi guru di Papua Barat penulis merasa perlu berbagi ilmu yang penulis miliki sehingga semakin banyak orang yang memperoleh manfaat dari buku ini. Semoga buku ini memang mencapai maksud tersebut.

Namun demikian, tentu tidak ada gading yang tak retak. Sebagai tulisan edisi pertama, tentu banyak hal yang masih perlu diperbaiki. Karena itu, kritik, saran dan komentar membangun sangat diharapkan demi perbaikan penulisan ide ini di edisi berikutnya. Akhirnya, semoga buku ini mampu memberikan pencerahan kepada para mahasiswa dan guru tentang teori bilangan. Semoga pula, ilmu yang penulis sharingkan melalui buku ini diterima oleh ALLAH sebagai ilmu yang bermanfaat (ilmun yun tafaa u bih) yang mengalir terus pahalanya sampai kiamat.

Pamekasan, November 2021

Hasan Basri

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR iii

DAFTAR ISI..... iv

BAB 1 BILANGAN BULAT 1

A. Definisi dan Sifat-Sifat pada Bilangan Bulat 1

B. Teorema-Teorema pada Bilangan Bulat dan contoh Pembuktiannya 5

C. Latihan soal 6

BAB 2 INDUKSI MATEMATIS.....7

A. Konsep Induksi Matematis 7

B. Prinsip Induksi Matematis.....7

C. Prinsip Induksi Matematis Kuat 9

D. Latihan Soal.....10

BAB 3 KETERBAGIAN 12

A. Definisi Keterbagian.....12

B. Teorema-Teorema dalam Keterbagian 13

C. Latihan Soal.....14

D. *The Well-Ordering Theorem*.....15

E. Algoritma Pembagian 15

F. Latihan Soal.....15

G. The Greatest Common Divisor (GCD)/FPB.....16

H. Latihan Soal.....19

BAB 4 BILANGAN PRIMA 20

A. Relatif Prima.....20

B. Bilangan Prima.....21

C. Teorema-teorema pada Bilangan Prima 21

D. Cara Menentukan Bilangan Prima dengan *"Sieve of Eratosthenes"* 23

E. Latihan Soal 24
BAB 5 PERSAMAAN DIOPHANTINE 25
A. Persamaan Diophantine 25
B. Latihan Soal 28
BAB 6 KONGRUENSI 29
A. Persamaan Kongruensi 29
B. Contoh Penggunaan Modulu dalam Kehidupan Sehari-hari 30
C. Teorema-Teorema Pada Kongruensi 30
D. Latihan Soal 34
E. Penggunaan Teorema dalam Pemecahan Masalah 34
F. Latihan Soal 35
DAFTAR PUSTAKA 36
PROFIL PENULIS 37

TEORI BILANGAN

BAB 1 BILANGAN BULAT

CAPAIAN PEMBELAJARAN :

- Mahasiswa memahami definisi dan sifat-sifat pada bilangan bulat.
- Mahasiswa memahami dan dapat membuktikan teorema-teorema pada bilangan bulat
- Menggunakan definisi, sifat dan teorema dalam menyelesaikan masalah pada bilangan bulat

A. Definisi dan Sifat-Sifat pada Bilangan Bulat

1. Definisi Bilangan Bulat

   Bilangan bulat adalah sebarang bilangan yang bukan pecahan atau desimal (*learners dictionary*). Bilangan bulat dapat berupa bilangan asli, negatif dari bilangan asli atau nol. Bilangan bulat biasanya dilambangkan dengan huruf Z.

   Bilangan Bulat = $Z = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$

2. Sifat-Sifat Bilangan Bulat.

   Sifat 1

   Perhatikan contoh dibawah ini!

   $5 \in Z$ dan $-100 \in Z$

   $5 + (-100) = -95$, dimana $-95 \in Z$

   $5 \times (-100) = -500$, dimana $-500 \in Z$

BAB 2

INDUKSI MATEMATIS

CAPAIAN PEMBELAJARAN :

- Mahasiswa memahami konsep dan prinsip induksi matematis, dan induksi matematis kuat.
- Mahasiswa dapat membuktikan pernyataan yang bernilai benar, dengan menggunakan prinsip induksi matematis.
- Mahasiswa dapat membuktikan pernyataan yang bernilai benar, dengan menggunakan prinsip induksi matematis kuat

A. Konsep Induksi Matematis

Apakah Induksi Matematis?

Apakah semua pernyataan yang benar selalu dapat dibuktikan dengan induksi matematis?

Kapan kita menggunakan prinsip Induksi Matematis?

B. Prinsip Induksi Matematis

Pembuktian dengan prinsip induksi matematis, jika ada sebuah pernyataan P_n akan dibuktikan benar untuk setiap n bilangan bulat positif. Maka pembuktian tersebut akan melalui tiga tahapan prosedur sebagai berikut:

1. Buktikanlah benar pernyataan tersebut untuk $n = 1$.
2. Andaikan benar untuk pernyataan $n = k$, dengan $k \in N$
3. Selanjutnya buktikan benar pernyataan tersebut untuk $n = k + 1$

BAB 3

KETERBAGIAN

CAPAIAN PEMBELAJARAN :

- Mahasiswa Memahami definisi keterbagian, *the well ordering property*, dan algoritma pembagian.
- Membuktikan teorema yang lain dengan menggunakan definisi ataupun teorema sebelumnya.
- Menentukan semua pembagi bilangan bulat
- Menentukan hasil bagi, dan sisa bagi dalam algoritma pembagian.
- Memahami konsep FPB/*Greatest Common Divisor (GCD*), dan algoritma pembagian.
- Menentukan GCD dari dua bilangan, serta menentukan dan melalui algoritma pembagian.
- Membuktikan teorema tentang GCD dengan menggunakan definisi GCD, dan pembuktian sebelumnya.

A. Definisi Keterbagian

Pernahkah Anda Mendengar kata-kata "habis dibagi"?

Dapatkah Anda memberikan contoh?

Apakah 10 habis dibagi 2 ? Mengapa demikian?

Apakah 15 habis dibagi 4 ? Mengapa demikian?

Apakah $\frac{1}{2}$ habis dibagi 2? Mengapa demikian?

Apa yang dapat anda simpulkan jika a habis membagi b ?

BAB 4 | BILANGAN PRIMA

CAPAIAN PEMBELAJARAN :

- Mahasiswa memahami definisi dua bilangan yang relatif prima dan bilangan prima
- Mahasiswa dapat menggunakan teorema bilangan prima dalam menyelesaiakan soal
- Mahasiswa dapat membuktikan teorema yang lain menggunakan definisi ataupun teorema sebelumnya.
- Mahasiswa dapat mendaftar bilangan prima dengan *sieve of eratosthenes*

A. Relatif Prima

Definisi

Dua bilangan $a, b \in Z$ dikatakan relatif prima jika $(a,b) = 1$

Contoh :

1. Bilangan 5 dan 6 merupakan relatif prima karena $(5,6) = 1$
2. Bilangan 8 dan 12 bukan merupakan relatif prima karena $(8,12) \neq 1$

Teorema 4

Jika a dan b relatif prima dan $a|bc$, maka $a|c$

Bukti :

BAB 5

PERSAMAAN DIOPHANTINE

CAPAIAN PEMBELAJARAN :

- Mahasiswa memahami definisi persamaan diophantine
- Mahasiswa dapat menentukan suatu persamaan diophantine memiliki solusi atau tidak
- Mahasiswa dapat menyelesaikan permasalahan terkait persamaan diophantine
- Mahasiswa dapat memahami teorema pada persamaan diophantine

A. Persamaan Diophantine

Definisi

Suatu persamaan berbentuk $ax + by = c$ dengan a, b, c bilangan-bilangan bulat dan a, b dua-duanya bukan nol disebut persamaan linear Diophantine jika penyelesaiannya dicari untuk bilangan-bilangan bulat.

Teorema

Persamaan linear Diophantine $ax + by = c$ mempunyai penyelesaian jika dan hanya jika $(a,b)|c$

Bukti :

Misalkan $(a,b) = d$ dan $d|c$

BAB 6 | KONGRUENSI

CAPAIAN PEMBELAJARAN :

- Mahasiswa memahami definisi kongruensi dan penggunaannya dalam kehidupan sehari-hari
- Mahasiswa dapat membuktikan teorema yang lain menggunakan definisi kongruensi atau teorema sebelumnya
- Mahasiswa dapat memecahkan masalah dengan menggunakan definisi atau teorema kongruensi.

A. Persamaan Kongruensi

Definisi

Misalkan *a,b* bilangan bulat dan *m* bilangan bulat positif. Maka dikatakan *a* dan *b* kongruen modulu *m* dengan dinotasikan dengan jika $m \mid (a-b)$.

Dengan kata lain jika $m \nmid (a-b)$, maka dapat dituliskan $a \not\equiv b \pmod{m}$, dan dikatakan a dan b tidak kongruen modulu m.

Contoh:

1. $44 \equiv 8 \pmod{9}$, karena $9 \mid (44-8)$
2. $27 \not\equiv 3 \pmod{5}$, karena $5 \nmid (27-3)$

DAFTAR PUSTAKA

Clark, W. Edwin. 2002. *Elementary Number Theory.* University of South Florida.

Gilbert, Linda dan Gilbert, Jimmie. 2009. *Elements of Modern Algebra Sventh Edition.*

Mubsetyo, Gatot. 2003. *Teori Bilangan*. Jakarta : Universitas Terbuka

Niven, Ivan, etc. *An Introduction to the Theory of Numbers Fifth Edition.* 1991. Courier Companies, Inc: Unites Stated of America

Redmond, D. 1996. *Number Theory – An Introduction.* New Work: Marcel Decker.

Rosen, K.H. 1993. *Elementary Number Theory and Its Applications*. Massachusetts: Addison Wesley

Sukarman, Henry. 1993. *Materi Pokok Teori Bilangan.* Jakarta: Universitas Terbuka

PROFIL PENULIS

Pada tahun 2012 beliau melanjutkan studi S2 di Universitas Negeri Surabaya (UNESA) dan menyelesaikan studi S2 pada tahun 2014 dengan IPK 3,56. Selanjutnya pada tahun 2016 beliau berkesempatan untuk melanjutkan studi S3 melalui program beasiswa Beasiswa Unggulan Dosen Indonesia-Dalam Negeri (BUDI-DN) dan mampu menyelesaikan studi S3 pada tahun 2020 dengan IPK 3,93 (Cumlaude). Selama studi beliau telah menghasilkan beberapa karya berupa artikel ilmiah baik yang terindeks Sinta maupun terindeks Scopus, selain itu beliau juga menghasilkan beberapa buku yaitu Mengembangkan HOTS Melalui Matematika dan Ragam Soal Matematis untuk Mengembangkan Disposisi Berpikir Kritis.

Setelah S3 beliau aktif mengikuti program kemdikbudristek seperti program bantuan implementasi kurikulum MBKM, program MBK, PJJ dan peningkatan kompetensi dosen melalui kemitraan dengan sekolah. Selain itu penulis juga aktif dalam kegiatan MBKM dengan berpartisipasi menjadi DPL Kampus Mengajar angkatan 2 dan menjadi PIC pada program Magang Studi Independen Bersertifikat (MSIB). Pada tahun 2021 beliau juga berhasil lulus menjadi asesor BAN S/M Provinsi Jawa Timur, selain itu di tahun yang sama beliau juga berhasil lulus dalam seleksi hibah mono tahun pada skema riset keilmuan mandiri.