

Jitu Halomoan Lumbantoruan, S.Pd., M.Pd



BUKU AJAR

Kalkulus

$$x = \sqrt{c + 25} - 8$$

LANJUT



$$\sum f(a + b) = c$$

$$(x + y)^2 - (x - y)$$



BUKU AJAR

Kalkulus LANJUT

Matematika adalah ilmu yang mempelajari tentang alam semesta. Matematika memiliki cabang ilmu, salah satunya adalah Kalkulus, kalkulus lanjut (BAB 1) membahas tentang struktur bilangan, dimana bab ini menjelaskan tentang bilangan kompleks dan turunannya (BAB 2) fungsi analitis, pada bab ini menjelaskan tentang fungsi dan keterkaitannya dengan fungsi-fungsi lain secara analitis (BAB 3) transformasi elementer, pada bab ini menjelaskan tentang bilangan berpangkat (BAB 4) Teori integrasi chuchy, pada bab ini diarahkan tentang bagaimana integral garis dan (BAB 5) Deret tak terhingga, pada bab ini dijelaskan bagaimana cara menghitung dan memahami deret tak terhingga.

Kesimpulan: Dengan membaca buku ini Akan menambah pengetahuan, logika dan wawasan keilmuan dalam bidang kalkulus lanjut. Para pembaca dapat menambah kesempurnaan buku ajar dengan memberikan konsep real dalam proses pembelajaran di dalam kelas maupun di kehidupan sehari-hari.



eureka
media aksara

Anggota IKAPI
No. 225/UTE/2021

☎ 0858 5343 1992
✉ eurekamediaaksara@gmail.com
📍 Jl. Banjaran RT.20 RW.10
Bojongsari - Purbalingga 53362

ISBN 978-623-151-271-0



9 786231 512710

BUKU AJAR KALKULUS LANJUT

Jitu Halomoan Lumbantoruan, S.Pd., M.Pd



PENERBIT CV.EUREKA MEDIA AKSARA

**BUKU AJAR
KALKULUS LANJUT**

Penulis : Jitu Halomoan Lumbantoruan, S.Pd., M.Pd

Desain Sampul : Eri Setiawan

Tata Letak : Rizki Rose Mardiana

ISBN : 978-623-151-271-0

Diterbitkan oleh : **EUREKA MEDIA AKSARA, JULI 2023**
ANGGOTA IKAPI JAWA TENGAH
NO. 225/JTE/2021

Redaksi:

Jalan Banjaran, Desa Banjaran RT 20 RW 10 Kecamatan Bojongsari
Kabupaten Purbalingga Telp. 0858-5343-1992

Surel : eurekamediaaksara@gmail.com

Cetakan Pertama : 2023

All right reserved

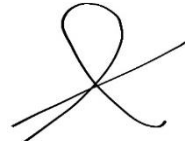
Hak Cipta dilindungi undang-undang

Dilarang memperbanyak atau memindahkan sebagian atau seluruh isi buku ini dalam bentuk apapun dan dengan cara apapun, termasuk memfotokopi, merekam, atau dengan teknik perekaman lainnya tanpa seizin tertulis dari penerbit.

PRAKATA

Puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa karena pertolongan-Nya saya dapat menyelesaikan Buku Ajar “Kalkulus Lanjut. Meskipun banyak rintangan dan hambatan dalam proses pembuatan Buku ini, tetapi Puji Tuhan di dalam pembuatan Buku Ajar ini saya berhasil menyelesaikannya dengan baik. Adapun tujuan penyusunan ini adalah untuk memenuhi kebutuhan dasar pembaca, para pelajar dan terkhusus para pengajar. Penyusunan Buku Ajar ini tentu tidak terlepas dari dukungan berbagai pihak, baik berupa dukungan materi maupun moril. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan ucapan terimakasih. Penulis menyadari bahwa Buku Ajar ini jauh dari kata sempurna dan banyak kekurangan sehingga penulis membutuhkan kritik dan saran yang bersifat positif untuk menyempurnakan Buku ajar ini. Semoga Buku Ajar ini dapat bermanfaat bagi para pembaca. Akhir kata saya ucapkan terimakasih.

Jakarta 10 Mei 2023



Jitu Halomoan Lumban toruan, S.Pd., M.Pd

DAFTAR ISI

PRAKATA	iii
DAFTAR ISI	iv
DAFTAR GAMBAR	vi
BAB 1 SISTEM BILANGAN REAL	1
A. Bilangan Kompleks.....	1
B. Geometri Bilangan Kompleks.....	2
C. Bilangan Real.....	3
D. Nilai Mutlak	6
E. Sistem Bilangan Kompleks	9
F. Operasi Aljabar Bentuk Kutub	13
G. Teorem De’Moivre.....	14
H. Rumus Euler.....	14
I. Akar Bilangan Kompleks	16
J. Persamaan Suku Banyak.....	17
K. Rangkuman	18
L. Soal Latihan 1	19
M. Soal Latihan 2.....	20
BAB 2 FUNGSI ANALITIK	23
A. Fungsi	23
B. Nilai Minimum dan Nilai Maksimum	30
C. Limit Fungsi	35
D. Rangkuman	61
E. Soal Latihan.....	64
BAB 3 TRANSFORMASI ELEMENTER	71
A. Fungsi Eksponen.....	71
B. Fungsi Logaritma.....	77
C. Pengertian Trigonometri.....	83
D. Rangkuman	89
E. Soal Latihan 1	92
F. Soal Latihan 2.....	99
BAB 4 TEORI INTEGRASI CAUCHY	101
A. Integral Garis.....	101
B. Integral Permukaan	103
C. Integral Lipat Dua.....	108
D. Integral Lipat Tiga	111

	E. Soal Latihan 1	126
	F. Soal Latihan 2	132
BAB 5	DERET TAK TERHINGGA	136
	A. Deret Tak Terhingga	136
	B. Deret Bergantian.....	141
	C. Fungsi Gamma	152
	D. Rangkuman.....	157
	E. Soal Latihan 1	159
	F. Soal Latihan 2	160
	DAFTAR PUSTAKA	163
	INDEKS	164
	GLOSARIUM	167
	TENTANG PENULIS	174

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1. 1	Grafik Bilangan Kompleks	3
Gambar 1. 2	Geometri Bilangan Real	5
Gambar 2. 1	Grafik Fungsi	26
Gambar 2. 2	Grafik Fungsi Invers	30
Gambar 2. 3	Grafik Minimum dan Maksimum	31

BAB

1

SISTEM BILANGAN REAL

PENDAHULUAN

❖ Deskripsi

Para pembaca diharapkan mampu memahami definisi dan konsep bilangan real dan bilangan imajiner dengan baik dan benar serta, mampu menyelesaikan soal dengan baik yang berkaitan dengan bilangan real dan membuat soal yang berkaitan dengan bilangan real

❖ Sub Materi

- Bilangan Kompleks
- Geometri Bilangan Kompleks
- Operasi Bilangan Real
- Dasar Aksiomatik
- Sistem Bilangan Kompleks

A. Bilangan Kompleks

Dalam bilangan kompleks terdapat $a, b \in \mathbb{R}$ maka bentuk umum bilangan kompleks adalah $z = a + bi$ dengan $b \neq 0$, i dinamakan satuan khayal (*imaginary unit*) bersifat $i^2 = -1$. a Dinamakan bagian riil dari z dan b dinamakan bagian dari z yang berturut-turut dinyatakan dengan $\text{Re}(z)$ dan $\text{Im}(z)$. Kompleks sekawan (*Complex Conjugate*) dari suatu bilangan kompleks adalah

$$\bar{z} = a - bi$$

BAB

2

FUNGSI ANALITIK

PENDAHULUAN

❖ Deskripsi

Para pembaca mampu memahami dengan baik defenisi dan konsep fungsi analitik serta mampu menjelaskan dengan baik persoalan yang berkaitan dengan fungsi analitik

❖ Sub Materi

- Fungsi
- Grafik Fungsi
- Nilai Minimum dan Nilai Maksimum
- Jenis- Jenis Fungsi
- Fungsi Trasendens
- Limit Fungsi

A. Fungsi

Sebuah fungsi terdiri dari himpunan domain, himpunan daerah hasil (*rang*) dan aturan korespondensi yang memberikan tepat satu elemen pada daerah hasil untuk setiap elemen pada domain. Definisi fungsi ini tidak memberikan batasan mengenai sifat dasar dari elemen-elemen kedua himpunan. Akan tetapi, pada awal pembahasan tentang kalkulus, elemen-elemen ini Akan merupakan bilangan-bilangan real. Aturan korespondensi dapat terwujud dalam berbagai bentuk, tetapi dalam kalkulus lanjut seringkali hubungan ini dalam wujud sebuah persamaan atau himpunan persamaan. Jika elemen-elemen dari domain dan daerah hasil diwakili oleh berturut-turut x dan y , dan f melambangkan fungsinya, maka aturan hubungan Akan

BAB 3

TRANSFORMASI ELEMENTER

PENDAHULUAN

❖ Deskripsi

Pembaca diharapkan mampu memahami definisi transformasi elementer dengan baik, mampu menyelesaikan persoalan yang berkaitan serta menjelaskan dengan baik dan benar.

❖ Sub Materi

- Pengertian Eksponensial
- Sifat Eksponensial
- Grafik Fungsi Eksponen
- Persamaan Fungsi
- Ketidaksamaan
- Fungsi Logaritma
- Kurva Logaritma
- Sifat Logaritma
- Persamaan Logaritma
- Ketidaksamaan Logaritma
- Eksponen Logaritma
- Pengertian Trigonometri
- Sifat Trigonometri

A. Fungsi Eksponen

Eksponen sering kita kenal dengan sebutan pangkat. Definisi eksponen adalah nilai yang menunjukkan derajat kepangkatan (berapa kali bilangan tersebut dikalikan dengan bilangan tersebut juga. Bentuk a^n (baca: a pangkat n) disebut bentuk eksponensial atau perpangkatan. a disebut dengan

BAB

4

TEORI INTEGRASI CAUCHY

PENDAHULUAN

❖ Deskripsi

Pembaca diharapkan mampu memahami definisi dan memahami teori integrasi Cauchy dengan baik serta mampu menyelesaikan dan menjelaskan dengan baik persoalan yang berkaitan dengan teori integrasi Cauchy

❖ Sub Materi

- Integral Garis
- Integral Permukaan
- Teorema Integral
- Teorema Stokes
- Integral Lipat Dua
- Integral Berulang
- Integral Lipat Tiga
- Transformasi Lipat

A. Integral Garis

Definisi integral garis:

Integral garis di bidang

Misalkan persamaan parameter kurva mulus C (di bidang)

$$x = x(t), y = y(t); a \leq t \leq b$$

Maka

$$\int_C f(x, y) dS = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

BAB 5

DERET TAK TERHINGGA

PENDAHULUAN

❖ Deskripsi

Pembaca diharapkan mampu memahami definisi Deret Tak terhingga dengan baik dan mampu menyelesaikan serta menjelaskan dengan baik soal yang diberikan dalam materi deret tak terhingga

❖ Sub Materi

- Deret Takterhingga
- Fungsi Gamma

A. Deret Tak Terhingga

Para pemikir awal kalkulus termasuk Newton dan Leibnitz sangat menyadari arti penting deret takterhingga. Nilai dari berbagai fungsi seperti sinus dan cosinus secara geometric dapat diperoleh hanya dalam kasus-kasus khusus. Deret tak terhingga member cara untuk mengembangkan table-table nilai yang ekstensif untuk deret tersebut. Bab ini dimulai dengan pernyataan mengenai apa yang dimaksud dengan deret takterhingga, kemudian akan dijawab pertanyaan mengenai kapan jumlah-jumlah ini dapat dinyatakan dengan sebuah nilai. Bagaimana membagi segmen garis menjadi bagian-bagian sangat kecil (infinitesimal) sudah merangsang imajinasi para ahli filsafat. Dalam paradoks yang diperkenalkan oleh Zeno dari Elea (pada abad kelima SM) seekor katak yang tidak terdimensi berada pada ujung dari sebuah batang kayu berdimensi satu. Katak tersebut melompat setengah jalan dan kemudian setengah

DAFTAR PUSTAKA

- Baiduri. (2002). *Persamaan Diferensial dan Matematika Model*. Jakarta: UMM Press
- Boyce, W.E, Diprima, R, C. (1997). *Elementary diferential Equation and Boundary Value Problem*, John Wiley. Canada.
- Darmawijoyo. (2011). *Persamaan Diferensial Biasa: Suatu Pengantar*. Jakarta: PT.Erlangga.
- Farlow, S.J. (1994). *Introduction to differential Equations and Their Aplication*. New York: McGraw-Hill, Inc.
- Martubi, M.Pd. M.T. (2004). *Persamaan Diferensial Orde 1*. Yogyakarta: UNY.
- Nababan. (2008). *Persamaan Diferensial Biasa*. Jakarta: Universitas Terbuka.
- Santoso, Widiarti. (1998). *"Persamaan diferensial Biasa Dengan Penerapan Modern"* edisi kedua. Jakarta: PT. Erlangga.
- Sholeh Hadi Pramono, M.S. (2013). *Persamaan Diferensial Biasa*. Jakarta: UB.
- Wiliamson, R.E. (1996). *Introduction to Differential Equation and Dynamical System*. New York: The McGraww-Hill, Inc.

INDEKS

A

Aljabar, 2, 13, 161
aturan-aturan operasi, 10

B

Batasan, 161
Benda jatuh, 161
bilangan, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 20, 21
Bilangan asli, 3, 8
Bilangan bulat, 3
bilangan imajiner, 9
Bilangan irasional, 4, 7
bilangan kompleks, 9, 10, 11
Bilangan rasional, 3
bilangan real, 4, 5, 8, 9, 10

D

Dependen, 161
Derajat, 161
desimal, 4
Diferensial, 157, 161, 164, 165

E

Eksak, 161, 165
Eksplisit, 161
Eksponensial, 32, 68, 161
Ekuivalen, 162

F

Fungsi, vi, 22, 25, 26, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 36, 38, 39, 44, 58, 59, 61,
68, 70, 71, 74, 85, 86, 131, 146, 147, 152, 162

H

himpunan, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
Homogen, 162

I

Implisit, 162

Independen, 162
Integral, 97, 98, 99, 101, 103, 104, 105, 107, 108, 117, 120, 126, 147,
152, 162
Integrasi, 108, 112, 113, 120, 122, 124, 162
interval, 8
Interval, 37, 147, 162

K

Koefisien, 163
Komplementer, 163
konstanta, 8
Konstanta, 150, 163

L

Lintasan Ortogonal, 163

M

Matematis, 163
Metode, 55, 58, 59, 112, 113, 117, 118, 151, 163

N

Nilai mutlak, 6, 10
Nilai-awal, 163
Notasi, 164
Numerik, 164

O

Orde, 157, 164

P

Parsial, 164
Peluruhan, 164
Pengenceran, 164
Persamaan, 9, 11, 17, 68, 71, 77, 86, 87, 99, 109, 111, 122, 147, 157,
164, 165
Persamaan diferensial, 157
Pertumbuhan, 165
Prosedur, 163, 165

R

Rangkaian Listrik, 166

Real, vi, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 166

S

Simultan, 166

Solusi, 12, 43, 166

Substitusi, 166

T

Temperature, 166

Transformasi, 97, 108, 166

Turunan, 151, 164, 166

U

Umum, 76, 166

V

Variabel, 23, 32, 167

W

Wronskian, 160

GLOSARIUM

- Aljabar** : Salah satu cabang matematika yang mempelajari tentang pemecahan masalah menggunakan simbol-simbol sebagai pengganti konstanta dan variable.
- Aproksimasi** : Pendekatan hasil pengukuran, misalnya panjang, masa, luas dan waktu dari suatu benda yang diukur karena hasil dari suatu pengukuran tidak memberikan ketelitian yang mutlak (absolut).
- Batasan** : Batas; sempadan; garis batas
- Benda jatuh** : Benda jatuh yang bergerak tanpa ada kecepatan awal
- Dependen** : Tidak terikat
- Derajat** : Pangkat tertinggi dari turunan tertinggi suatu persamaan diferensial.
- Diferensial** : Adalah satu cabang kalkulus dalam matematika yang mempelajari bagaimana nilai suatu fungsi berubah menurut perubahan input nilainya.
- Eksak** : Hasil perkalian, tidak dapat diubah-ubah lagi
- Eksplisit** : Gamblang; tersurat; nampak jelas
- Eksponensial** : Bersifat atau berhubungan dengan eksponen

Ekivalen	: Mempunyai nilai (ukuran, arti, atau efek) yang sama; seharga; sebanding; sepadan.
Fungsi	Suatu relasi yang : menghubungkan setiap anggota x dalam suatu himpunan.
Himpunan	: (Kumpulan objek yang memiliki sifat yang dapat didefinisikan dengan jelas) segala koleksi benda-benda tertentu yang dianggap sebagai satu kesatuan.
Homogen	: Istilah yang digunakan untuk menunjukkan bahwa suatu hal tersebut adalah sama, baik itu sifatnya, tingkah lakunya dan karakteristiknya.
Implisit	: Tersirat; tidak dinyatakan secara jelas atau terang-terangan; mengandung pengertian yang dalam.
Independen	: Terikat
Integral	: Mengenai keseluruhannya; meliputi seluruh bagian yang perlu untuk menjadikan lengkap
Integrasi	: Pembauran hingga menjadi kesatuan yang utuh atau bulat
Interval	: Suatu himpunan bilangan real dengan sifat bahwa setiap bilangan yang terletak di antara dua bilangan dalam

	himpunan itu juga termasuk ke dalam himpunan
Koefisien	: Faktor pengali
Komplementer	: Saling melengkapi
Konstanta	: Suatu nilai tetap; suatu bilangan yang muncul secara alami dalam matematika.
Limit	: Nilai yang mendekati sebuah variabel bilangan real.
Linear	: Terletak pada suatu garis lurus.
Lintasan Ortogonal	: Proyeksi yang bidang proyeksinya mempunyai sudut tegak lurus terhadap proyektornya, garis-garis memperoyeksikanya benda terhadap bidang proyeksi disebut bidang proyektor
Matematis	: Sangat pasti dan tepat
Metode	: Prosedur atau cara yang di tempuh untuk mencapai tujuan tertentu.
Modifikasi	: Cara merubah bentuk sebuah barang dari yang kurang menarik menjadi lebih menarik tanpa menghilangkan fungsi aslinya, serta menampilkan bentuk yang lebih bagus dari aslinya.
Nilai-awal	: Suatu persamaan diferensial yang memenuhi kondisi awal tertentu atau syarat awal yang diberikan.

Notasi	: Seperangkat atau sistem lambang yang menggambarkan aljabar
Numerik	: Berwujud nomor (angka); yang bersifat angka atau sistem angka
Orde	: Turunan tertinggi dalam suatu persamaan diferensial
Parsial	: Sebagian dari keseluruhan
Peluruhan	: Merupakan penurunan atau pengurangan nilai suatu besaran terhadap nilai besaran sebelumnya.
Pengenceran	: Sebuah usaha yang dipakai untuk sebuah senyawa melalui cara penambahan jumlah pelarut yang memiliki sifat netral, biasa digunakan adalah air murni (aquadest) dengan ukuran tertentu.
Persamaan	: Suatu pernyataan matematika dalam bentuk simbol yang menyatakan bahwa dua hal adalah persis sama.
Persamaan Linear	: adalah sebuah persamaan aljabar, yang tiap sukunya mengandung konstanta, atau perkalian konstanta dengan variabel tunggal.
Persamaan Diferensial	: Persamaan matematika untuk fungsi satu variabel atau lebih, yang menghubungkan nilai fungsi itu sendiri dan

- turunannya dalam berbagai orde.
- Persamaan Eksak** : Adalah suatu persamaan Diferensial tingkat satu dan pangkat satu berbentuk $M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0 \dots (i)$ serta jika memenuhi $(\frac{dm(x,y)}{dy}) = (\frac{dn(x,y)}{dx})$
- Persamaan yang dapat Dipisahkan** : Adalah sebuah persamaan yang memisahkan dy dan semua ekspresi yang berkaitan dengan y pada satu serta dx dan semua ekspresi yang berkaitan dengan x pada ruas yang lain.
- Pertumbuhan** : Merupakan kenaikan atau pertambahan nilai suatu besaran terhadap besaran sebelumnya.
- Polinomial (suku banyak)** : Pernyataan matematika yang melibatkan jumlahan perkalian pangkat dalam satu atau lebih variabel dengan koefisien.
- Prosedur** : Perangkaian aksi yang spesifik, tindakan, atau operasi yang harus dijalankan atau dieksekusi dengan cara yang baku agar selalu memperoleh hasil yang sama dari keadaan yang sama; tahap kegiatan untuk menyelesaikan suatu aktivitas; metode langkah demi langkah secara pasti dalam memecahkan suatu masalah.

Rangkaian Listrik	: Sambungan dari bermacam-macam elemen listrik pasif seperti resistor, kapasitor, induktor, transformator, sumber tegangan, sumber arus, dan saklar (switch).
Real	: Bilangan yang dinyatakan dalam bentuk decimal
Simultan	: Sesuatu yang terjadi berbarengan atau pada waktu yang bersamaan.
Solusi	: acara penyelesaian; pemecahan
Substitusi	: Penggantian
Temperature	: Sebuah usaha yang dipakai untuk sebuah senyawa melalui cara penambahan jumlah pelarut yang memiliki sifat netral, biasa digunakan adalah air murni (aquadest) dengan ukuran tertentu
Transformasi	: Perubahan rupa (bentuk, sifat, fungsi, dan sebagainya).
Turunan	: Ilmu kalkulus merupakan pengukuran terhadap bagaimana fungsi berubah seiring perubahan nilai input.
Umum	: Kebiasaan yang sudah baku dan sudah menjadi milik khalayak, umum mengacu pada hal-hal yang sudah terbiasa terjadi dalam masyarakat, atau adapun yang menyatakan bahwa umum adalah kerakyatan, yang

artinya orang kebanyakan ,
kata umum juga berarti
lumrah.

Variabel

: Objek penelitian; apa yang
menjadi fokus dalam sebuah
penelitian

TENTANG PENULIS



Penulis bernama lengkap Jitu Halomoan Lumbantoruan, S.Pd. M.Pd. Lahir di Sitampurung 26 November 1986, Taput, Propinsi Sumatra Utara. Saya merupakan anak kelima dari Lima bersaudara. Penulis lahir dari pasangan suami istri Bapak Togu Lumbantoruan dan Ibu Ratima Br. Sianturi. Penulis sekarang bertempat tinggal di Jalan Matador Perum Gria Marza Blok C RT 01/RW 07 Jatirangga Cibubur,

Jatisampurna, Bekasi. Penulis menyelesaikan Pendidikan Dasar di Sekolah Dasar Negeri 2 Sitampurung dan lulus pada Tahun 1999, lalu melanjutkan Sekolah Menengah Pertama di SLTP Negeri 2 Siborong-borong dan lulus pada Tahun 2002, melanjutkan Pendidikan di SMA PGRI 20 Siborong-borong lulus pada Tahun 2005, kemudian melanjutkan jenjang Pendidikan S1 di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia (UKI) Jakarta dan lulus pada Tahun 2009, pada Tahun 2014 kemudian saya melanjutkan jenjang Pendidikan S2 di Universitas Negeri Jakarta (UNJ) Program Studi Mengister Pendidikan Matematika dan lulus pada Tahun 2017. Saat ini penulis mengajar di Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan (FKIP) Universitas Kristen Indonesia (UKI). Buku Ajar ini adalah salah satu buku yang ditulis untuk mempermudah proses belajar mengajar. Harapan saya, dengan di Bantu buku ajar ini Akan lebih mudah memahami serta memperoleh hasil yang lebih baik. Saya sangat mengharapkan saran dan kritikan yang bersifat membangun untuk kemajuan bersama. Terimakasih, Salam

A stylized, handwritten signature in black ink. It features a large, looped initial 'J' that crosses over itself and extends into a long, sweeping horizontal stroke that tapers off to the right.

Jitu Halomoan Lumbantoruan, S.Pd. M.Pd