Editor:
Dr. Arie Anang Setyo, M.Pd

ANALISIS REAL LANJUT

Prof. Dr. Syamsu Qamar Badu, M.Pd
Prof. Dr. Evi Hulukati, M.Pd
Prof. Dr. Sarson W. DJ. Pomalato, M.Pd

ANALISIS REAL LANJUT

Buku Analisis Real Lanjut ini terdiri dari tiga bab yaitu Sistim Bilangan Real, Barisan, dan Limit dan Kekontinuan. Bab Sistem bilangan real yang terdiri dari, Aksioma Lengkap, Supremum dan Infimum, Sifat Archimedean, Kepadatan Bilangan Rasional,Topology di R; Pada Bab Barisan membahas tentang Kekonvergenan, Teorema Limit, Limit Tak Hingga, Barisan Monoton dan Barisan Cauchy, Sub Barisan, Lim Sup dan Lim Inf; Bab Limit Dan Kekontinuan Membahas tentang Limit Fungsi, Kriteria Barisan Untuk Limit Fungsi, Fungsi Kontinu dan Sifat-Sifat Fungsi Kontinu. Buku ini disajikan secara ringkas dan jelas sehingga mudah untuk dibaca dan dipahami.

eureka media aksara
Anggota IKAPI
No. 225/JTE/2021
0858 5343 1992
eurekamediaaksara@gmail.com
Jl. Banjaran RT.20 RW.10
Bojongsari - Purbalingga 53362

ISBN 978-623-516-012-2

ANALISIS REAL LANJUT

Prof. Dr. Syamsu Qamar Badu, M.Pd.
Prof. Dr. Evi Hulukati, M.Pd.
Prof. Dr. Sarson W. DJ. Pomalato, M.Pd.

PENERBIT CV.EUREKA MEDIA AKSARA

ANALISIS REAL LANJUT

Penulis	:	Prof. Dr. Syamsu Qamar Badu, M.Pd. Prof. Dr. Evi Hulukati, M.Pd. Prof. Dr. Sarson W. DJ. Pomalato, M.Pd.
Editor	:	Dr. Arie Anang Setyo, M.Pd.
Desain Sampul	:	Ardyan Arya Hayuwaskita
Tata Letak	:	Rizki Rose Mardiana
ISBN	:	978-623-516-012-2

Diterbitkan oleh	:	**EUREKA MEDIA AKSARA, JULI 2024 ANGGOTA IKAPI JAWA TENGAH NO. 225/JTE/2021**

Redaksi:
Jalan Banjaran, Desa Banjaran RT 20 RW 10 Kecamatan Bojongsari Kabupaten Purbalingga Telp. 0858-5343-1992
Surel : eurekamediaaksara@gmail.com
Cetakan Pertama : 2024

PRAKATA

Puji syukur dipanjatkan ke hadirat Allah SWT karena hanya dengan izin dan kuasaNya, Tim penyusun dapat merampungkan penulisan buku ini. Buku ini disusun untuk menambah referensi mahasiswa dalam mata kuliah Analisis Real Lanjut. Berdasarkan pengalaman sekian tahun, salah satu kendala yang dihadapi mahasiswa dalam matakuliah Analisis Real adalah kurangnya referensi. Terlebih lagi mahasiswa kurang kreatif mencari rujukan, maka semakin sulit mereka mempelajari materi kuliah.

Buku Analisis Real Lanjut akan membahas mengenai Sistem Bilangan Real, khususnya Aksioma Kelengkapan. Seharusnya topik ini adalah materi pengantar karena sangat elementer tapi tim sepakat bahwa materi ini sangat penting dan berperan dalam pembahasan selanjutnya. Banyak ditemui, mahasiswa kurang mampu menerjemahkan kalimat verbal dalam bentuk logika matematika. Masalah lain yang paling menonjol adalah, konstruksi berpikir mahasiswa yang masih jauh dari cara berpikir matematis. Karena itu, topik Topologi di R, juga masih disajikan dalam buku ini.

Tim menyadari bahwa sebagai rujukan, buku ini masih banyak kekurangan, baik dari segi penulisan, penyajian maupun pendalaman materi. Karena itu saran dan kritik masih sangat dibutuhkan untuk kesempurnaannya.

Tim penyusun

DAFTAR ISI

BAB 1 SISTEM BILANGAN REAL

A. Aksioma Lengkap

Pada bagian pengantar analisis real telah dibahas bahwa himpunan bilangan Rasional Q dan bilangan real R memenuhi 15 aksioma (aksioma gelanggang dan terurut). Namun terdapat satu aksioma yang membedakanya yakni "aksioma lengkap" atau "aksioma kelengkapan".

Aksioma tersebut diilustrasikan sebagai berikut.

Misalkan ada fungsi $f(x) = x^2 - 2$. Jika Digambar grafiknya, maka bentuknya adalah parabola terbuka ke atas dimana grafik tersebut memotong sumbu X antara 1 dan 2. Artinya, akar fungsi tersebut terletak antara 1 dan 2. Tapi apakah kita yakin bahwa ada bilangan antara 1 dan 2 itu? Dengan kata lain, apakah terdapat x sedemikian hingga $x^2 - 2 = 0$. Jika sumbu X mewakili bilangan rasional Q, maka tidak yang memenuhi. Yakni, tidak ada bilangan rasional $\sqrt{2}$. Secara umum, $\sqrt{p}$ adalah bilangan irrasional (bukan rasional) untuk sebarang p bilangan prima. Berarti terdapat banyak bilangan irrasional. Sehingga apabila pembahasan dibatasi pada system bilangan rasional, maka akan terdapat banyak "lubang" pada garis bilangannya.

BAB 2 BARISAN

Dalam bab ini kita akan membahas suatu topik menarik yakni barisan. Beberapa konsep yang dibahas terkait barisan antara lain kekonvergenan, limit barisan, barisan monoton, barisan Cauchy. Akan banyak defenisi dan teorema yang akan dibahas terkait dengan topik-topik tersebut.

A. Kekonvergenan

Barisan adalah sebuah fungsi dengan domain bilangan natural *N*. Jika *s* adalah sebuah barisan, maka suku atau nilai ke *n* dari *s* ditulis s_n. Sementara barisan *s* ditulis (s_n) adalah barisan dengan elemen $(s_1, s_2, s_3, \ldots)$. Dengan demikian barisan $(\frac{1}{n})$ adalah barisan:

$$(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\ldots\ldots)$$

Kadang kala domain barisan diubah dari *N* menjadi $N \cup \{0\}$ atau $\{n \in N: n \geq m\}$. Artinya kita ingin memulai suku (s_n) dari s_0 atau s_m. Dalam kasus ini ditulis $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ atau $(s_n)_{n=m}^{\infty}$

Contoh:

1. Perhatikan barisan (s_n) dengan $s_n = 1 + (-1)^n$. Jika didaftar beberapa elemen pertama dari barisan

BAB 3 LIMIT DAN KEKONTINUAN

Topik tentang limit adalah tema sentral dalam analisis. Pada bab sebelumnya, telah dibahas tentang limit barisan yang disertai dengan defenisi dan teorema yang berlaku. Dalam bab ini akan dibahas limit fungsi yang hubungannya dekat limit barisan dan akan digali lebih dalam hubungan tersebut dalam pembuktian-pembuktian.

A. Limit Fungsi

Untuk memeriksa limit fungsi f di suatu titik c, maka perlu diketahui apakah nilai $f(x)$ makin dekat ke suatu bilangan Ketika x mendekati c. Untuk itu, perlu didefenisikan sebarang titik dekat ke c. Istilah "dekat" harus dibuat lebih jelas dan untuk itu dimanfaatkan konsep limit barisan. Dalam hal ini, yang akan menjadi perhatian adalah fungsi dengan doman $D \subseteq R$ dan $D \neq \emptyset$.

Defenisi 3.1

Misalkan $f : D \to R$ adalah fungsi dan c adalah titik akumulasi dari D. Dikatakan bilangan real L adalah limit f di c, ditulis

$$\lim_{x \to c} f(x) = L, \text{ jika}$$

DAFTAR PUSTAKA

Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2010), *Introduction to Real Analysis, Fourth Edition.* New York: John Wiley & Sons

Lay, S. R (2006), *Analysis with an Introduction to Proof, Fourth Edition.* New Jersey: Pearson Prentice Hall

Rudin, W (1976), *Principles of Mathematical Analysis, Third Edition.* New York: McGraw-Hill Book Company

Sohrab, H. H (2014), *Basic Real Analysis, Second Edition.* New York: Springer Science+Business Media

Simmons, G. F (1983), *Introduction to Topology and Modern Analysis.* New York: McGraw-Hill Book Company

GLOSARIUM

Aksioma	:	Pernyataan benar yang diterima tanpa memerlukanpembuktian
Corollary	:	Akibat dari suatu teorema yang telah dibuktikan kebenarannya
Defenisi	:	Syarat atau kriteria dari obyek yang dibicarakan
Infimum	:	Batas bawah terbesar dari subset bilangan real
Lemma	:	Sebuah proposisi yang digunakan untuk pembuktian pernyataan lainnya.
Supremum	:	Batas atas terkecil dari sebuah subset bilangan real
Teorema	:	Pernyataan benar yang memerlukan pembuktian

INDEKS

TENTANG PENULIS

Prof. Dr. Syamsu Qamar Badu, M.Pd.

Penulis lahir di Gorontalo, 3 Juni 1960. Saat ini penulis bekerja sebagai Guru Besar Tetap di Univ. Negeri Gorontalo, Fak MIPA, Jurusan Pend. Matematika. Email: sqb.tuta@gmail.com

Prof. Dr. Evi Hulukati, M.Pd.

Lahir di Gorontalo, 30 Mei 1960. Lulusan S1 bidang Pendidikan Matematika FKIP Universitas Samratulangi pada tahun 1984. Lususan S2 bidang Pendidikan IPA Universitas Pendidikan Indonesia pada tahun 1997. Gelar Doktor diperoleh pada tahun 2009 dalam bidang Pendidikan Matematika. Saat ini merupakan Guru Besar pada Program Studi Pendidikan Matematika FMIPA Universitas Negeri Gorontalo dan mengampuh beberapa mata kuliah diantaranya Analisis Real, Teori Belajar Matematika, Statistika Dasar, Penelitian Pengajaran Matematika, Teori Bilangan, Aljabar Linier, Sejarah dan Filsafat, dan Psikologi Pembelajaran. Aktif menulis artikel dalam beberapa Jurnal Ilmiah baik nasional maupun internasional seperti tulisannya yang berjudul "The Impact of Problem-Solving Methods, Learning Styles, And Initial Mathematical Abilities on Mathematical Problem-Solving Abilities of Tenth-Grade Students in

SMA Negeri 1 Waisala Maluku" pada AJHSSR. Aktif dalam berbagai organisasi dan juga pernah menjadi narasumber, pemakalah, sekaligus pemateri dalam berbagai seminar baik nasional maupun internasional, serta pada tahun 2017 berhasil mendapatkan penghargaan Satya Lencana Karya Satya XX Tahun.

Prof. Dr. Sarson W. DJ. Pomalato, M.Pd.

Lahir di Gorontalo pada tanggal 08 Agustus 1960. Gelar Sarjana Pendidikan Matematika diraih pada tahun 1984 di FKIP Universitas Samratulangi Manado. Gelar Magister Pendidikan IPA diperoleh dari IKIP Bandung pada Tahun 1996. Gelar Doktor dalam bidang Pendidikan Matematika diperoleh dari Univeristas Pendidikan Indonesia pada tahun 2004. Saat ini merupakan dosen tetap yang berpangkat Guru Besar di FMIPA Universitas Negeri Gorontalo dan mengampuh beberapa mata kuliah diantaranya Aljabar Linier, Geometri, Matematika Diskrit, Proses Belajar Mengajar Matematika, Metodologi Penelitian, Statistika, Struktur Aljabar, Filsafat Ilmu, Kalkulus, dan Komunikasi Organisasi. Aktif menulis artikel seperti tulisannya yang berjudul "*The Implementation of Krikpatrick's Evaluation Model in The Learning of Initial Value and Boundary Condition Problem*" pada Jurnal Macrothink Institute di Las Vegas dan tulisan "*Student Error Analysis In Solving Mathematical Problems*" pada Universal Journal of Educational Research. Pernah menjadi narasumber, pemakalah, sekaligus pemateri dalam seminar baik nasional maupun internasional, serta pada tahun 2012 berhasil mendapatkan penghargaan Satya Lencana Karya Satya XX Tahun.